

Elastizität und Festigkeit.

Die für die
Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmäßige Grundlage.

Von

Dr.-Ing. C. Bach,

K. Württ. Baudirektor,
Professor des Maschinen-Ingenieurwesens an der K. Technischen Hochschule Stuttgart.

Mit in den Text gedruckten Abbildungen und 20 Tafeln in Lichtdruck.

~~~~~  
**Fünfte, vermehrte Auflage.**  
~~~~~



Berlin.
Verlag von Julius Springer.
1905.

Der Verfasser behält sich das Recht der Übersetzung in fremde
Sprachen vor.

Universitäts-Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke) in Berlin N.

ISBN-13: 978-3-642-89512-8 e-ISBN-13: 978-3-642-91368-6

DOI: 10.1007/978-3-642-91368-6

Softcover reprint of the hardcover 5th edition 1905

Vorwort zur ersten Auflage.

Die vorliegende Arbeit, welche in zwei Lieferungen erschienen ist, von denen die erste, bis § 40 reichend, Ende Februar und die zweite Ende September 1889 abgeschlossen wurde, war — in beschränkterem Umfange und mit Hinweglassung dessen, was sonst anderwärts zusammengestellt zu finden ist — ursprünglich nur für die Zuhörer meines Vortrags über Elastizitätslehre bestimmt, mit dem Ziele, ihnen die erfahrungsmäßigen Grundlagen der technischen Elastizitäts- und Festigkeitslehre zu bieten, ohne hierzu die für die Vorlesung verfügbare Zeit (3 Stunden im Sommersemester), welche mit Rücksicht auf die Behandlung der schwierigen Aufgaben dieses Gebiets an und für sich knapp bemessen erscheint, in Anspruch nehmen zu müssen. Wiederholten Anregungen schließlich Folge leistend, übergebe ich dieselbe mit den hierdurch bedingten Erweiterungen der Öffentlichkeit.

Sie geht davon aus, daß es in erster Linie auf die Erkenntnis des tatsächlichen Verhaltens der Materialien ankommt.

In Gemäßheit dieses Standpunktes war zunächst der unanschauliche Begriff des Elastizitätsmoduls fallen zu lassen. Selbst wenn man von der verbreiteten und angesichts des wirklichen Verhaltens der Stoffe höchst bedenklichen Begriffsbestimmung absieht, nach der unter Elastizitätsmodul diejenige Kraft zu verstehen ist, welche ein Prisma vom Querschnitte 1 um seine eigene Länge ausdehnen würde, falls dies ohne Überschreitung der Elastizitätsgrenze möglich wäre, so erweist sich der Umstand, daß der als Maß der Elastizität für die Betrachtungen und Rechnungen geschaffene Elastizitätsmodul umgekehrt proportional der Elastizität ist, als außerordentlich störend. Durch Einführung des Dehnungskoeffizienten (§ 2), dessen Größe in geradem Ver-

hältnisse zur Formänderung steht, läßt sich dieser Übelstand auf einfache Weise beseitigen. Demgemäß sind sämtliche Rechnungen und Erörterungen mittels des Dehnungskoeffizienten durchgeführt. Die Gewinnung von Maßen für den Dehnungsrest und für die Federung, d. i. die eigentliche Elastizität zum Unterschied von dem Maße für die Gesamtdehnung, ist damit ohne weiteres gesichert.

An die Stelle des der Anschauung unzugänglichen Schubelastizitätsmoduls tritt der Schubkoeffizient (§ 29), dessen Bedeutung unmittelbar aus dem Vorgange der Schiebung folgt.

Sodann war der mit der Längsdehnung (Zusammendrückung) verknüpften Quersammenziehung (Querdehnung) (§ 1) und deren Einfluß (§ 7, § 9, Ziff. 1, § 14, § 20, Ziff. 2, S. 82 u. s. w.) mehr Beachtung zu schenken, als dies sonst zu geschehen pflegt; zumal in weiten Kreisen z. Z. noch die Auffassung besteht, daß die Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen innerhalb gewisser Spannungsgrenzen allgemein gültig sei, gleichgültig, ob außer der Zug- oder Druckkraft, welche in Richtung der Stabachse wirkt, auch noch Kräfte senkrecht zu letzterer tätig sind oder nicht.

Ferner mußten aus der meist ganz unbeachtet gelassenen Tatsache, daß die eben erwähnte Proportionalität überhaupt nicht für alle der Technik wichtigen Materialien vorhanden ist, die nötigen Folgerungen gezogen werden. Dies trifft beispielsweise zu für das dem Maschinenbau unentbehrliche und daselbst so vielfach verwendete Gußeisen, bei dem die Dehnungen rascher wachsen als die Spannungen; für das als Kraftübertragungsmittel so wichtige Leder, bei welchem das Umgekehrte stattfindet u. s. f. (insbesondere § 2, § 20, Ziff. 4, S. 85 u. f., § 22, Ziff. 2, § 26, S. 113, Fußbemerkung 1, § 35 und § 36, § 40, § 41, § 56, S. 324 u. f., § 58, S. 344, Fußbemerkung, u. s. w.).

Was Einzelheiten anlangt, so glaubte ich Wert legen zu sollen auf die Klarstellung von Begriffen wie Festigkeit (§ 3), Proportionalitäts- und Elastizitätsgrenze (§ 2, § 4), Knickbelastung (§ 23), Zerknickungskoeffizient (§ 26), zulässige Anstrengung (§ 48, Ziff. 1), Einspannung (§ 53) u. s. w. sowie auf die Beseitigung von eingebürgerten Irrtümern. Wie oft wird beispielsweise die Berechnung auf Schub vorgeschrieben, wo Biegung maßgebend ist (§ 40, § 52); wie allgemein ist bei Ermittlung des

Dehnungskoeffizienten (Elastizitätsmoduls) aus Biegungsversuchen der Einfluß der Schubkraft vernachlässigt worden (§ 22, Ziff. 1, § 52, Ziff. 2b); wie verbreitet ist die Auffassung der unbedingten Gültigkeit der Gleichung der einfachen Zug- und Druckfestigkeit, nach welcher es nur auf die Größe des Querschnittes ankommt (§ 9, § 13, § 14); wie selten wird erkannt, daß die Druckfestigkeit bei Materialien wie weichem Stahl u. s. w., die Fließ- oder Quetschgrenze ist (§ 11, Schluß; § 27, Ziff. 1, S. 122 u. s. f.).

Die bedeutende Abhängigkeit der Biegezugfestigkeit des Gußeisens von der Querschnittsform war so weit festzustellen, daß sie rechnermäßig berücksichtigt werden kann (§ 20, § 22, Ziff. 2).

Das immer dringender gewordene Bedürfnis, die Anstrengung auf Drehung beanspruchter Körper von nichtkreisförmigem Querschnitt mit mehr Sicherheit feststellen zu können, als dies bisher möglich war, verlangte eine eingehende Behandlung der hierher gehörigen Aufgaben (§ 32 bis § 36, § 43, § 47, § 49, § 50, § 52, Fußbemerkung S. 281 und 282). Dabei ergab sich die Notwendigkeit, Formänderungen ins Auge zu fassen, die bisher bei Beurteilung der Materialanstrengung ganz unbeachtet gelassen worden waren (§ 34, Ziff. 3).

Dem Umstande, daß die zulässige Schubspannung zur zulässigen Normalspannung ziemlich häufig nicht in dem Verhältnisse steht, wie dies die Elastizitätslehre ermittelte (Gleichung 101, 102 [§ 31, Gleichung 5 und 6]), habe ich — wie bereits in meinen Maschinenelementen 1880 getan (S. 11, S. 205 u. f. daselbst) — durch Einführung des Anstrengungsverhältnisses Rechnung getragen (α_0 in § 48, Ziff. 2, auch β_0 in § 45, Ziff. 1).

Die Außerachtlassung der schon ursprünglich vorhandenen Krümmung der Mittellinie bei auf Biegung beanspruchten Körpern erschien nicht mehr in dem Maße zulässig, wie dies bisher bei Berechnung von Kettenhaken und dergleichen ziemlich allgemein üblich war. Wenn auch die Endergebnisse der mit Rücksicht hierauf in § 54 angestellten Erörterungen nichts Neues bieten, so dürfte doch der hierbei eingeschlagene Weg zur Gewinnung eines besseren Einblicks in die Anstrengungsverhältnisse, sowie dazu beitragen, daß mancher, welcher bisher die ursprüngliche Krümmung nicht berücksichtigte, sie mindestens schätzungsweise bei Wahl der zulässigen Anstrengung in Betracht zieht.

In § 60 war die Anstrengung der elliptischen Platte zu bestimmen; außerdem waren bisher nicht beachtete Einflüsse festzustellen. Weitergehende Ermittlungen mußten namentlich bei den großen Schwierigkeiten, welche hierauf bezüglichen Versuchen begegnen, zunächst unterbleiben.

Gern hätte ich Versuche der in § 56 behandelten Art in größerem Umfange sowie auch solche zu § 57 durchgeführt. Da mir aber weder für meine Lehrtätigkeit noch für meine Versuchsarbeiten ein Assistent zur Verfügung steht, und der eigenen Arbeitskraft durch die Natur eine Grenze gezogen ist, auch die übrigen Mittel sehr knapp bemessen sind, so mußte wenigstens vorerst Beschränkung geübt werden. Dieselbe Bemerkung hat auch Geltung für andere Abschnitte, insbesondere für § 61.

Im ganzen habe ich mich namentlich im Hinblick auf die Bedürfnisse der mitten in der Ausführung stehenden Ingenieure bestrebt, die einzelnen Entwicklungen so viel als tunlich für sich allein verständlich durchzuführen und den hierzu erforderlichen mathematischen Apparat unter Heranziehung von Versuchen nach Möglichkeit zu beschränken. Daß sich auf diesem Wege Aufgaben, welche sonst trotz ihrer großen Wichtigkeit gar nicht oder nur ganz ausnahmsweise behandelt zu werden pflegen, recht klar und dazu fruchtbringender, als es bisher geschehen ist, erörtern lassen, davon dürften beispielsweise die §§ 33, 34 und 43, S. 220 u. f., sowie § 52, Ziff. 2, Zeugnis ablegen. Die Tatsache, daß die vor vier Jahrzehnten von de Saint Venant gegebene Lösung der Torsionsaufgabe — ungeachtet ihrer wissenschaftlichen Strenge — nur ganz vereinzelt Eingang in die technische Literatur gefunden hat, dürfte vorzugsweise in dem Mangel an verhältnismäßiger Einfachheit der zur Lösung führenden Rechnungen begründet sein.

Um den Umfang des Buches innerhalb einer gewissen Grenze zu halten, wurde die zweite Lieferung etwas weniger umfassend gestaltet, als ursprünglich geplant war, wodurch übrigens die Anschauung über die wirklichen Vorgänge, über das tatsächliche Verhalten des Materials eine Beeinträchtigung nicht erfährt. Es erschien dies um so mehr zulässig, als seit Abschluß der ersten Lieferung das v. Tetmajersche Werk: „Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre“ mit einer Fülle von Beobachtungsmaterial zur Ausgabe gelangt ist (siehe auch des Verfassers

Besprechung dieses Buches in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1889, S. 452—455 und S. 473—479) und überdies die wertvollen Arbeiten von Mehrtens vorliegen. Beispiele und Erfahrungszahlen glaubte ich ohnehin als naturgemäß in meine Maschinenelemente gehörig dahin verweisen zu sollen.

Möge auch diese Arbeit, welche nicht mehr als ein Schritt in neuer Richtung sein soll, zur Förderung der Technik und damit der Industrie beitragen, indem sie die Bedeutung der Erkenntnis des tatsächlichen Verhaltens der Materialien klarlegt, und indem aus ihr erhellt,

daß es nicht genügt, von dem Satze der Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen allein ausgehend, das ganze Gebäude der Elastizität und Festigkeit auf mathematischer Grundlage aufzubauen,

daß es vielmehr für den Konstrukteur — namentlich wenn er in voller Erkenntnis der wirklichen Verhältnisse die Abmessungen festsetzen und sich nicht in dem Geleise hergebrachter Formen halten will — notwendig erscheint, immer und immer wieder die Voraussetzungen der einzelnen Gleichungen, welche er benützt, im Spiegel der Erfahrungen, soweit solche vorliegen, sich zu vergegenwärtigen, und die auf dem Wege der Überlegung, der mathematischen Ableitung gewonnenen Beziehungen hinsichtlich des Grades ihrer Genauigkeit zu beurteilen, soweit dies bei dem jeweiligen Stande unserer Erkenntnisse überhaupt möglich ist,

und daß da, wo die letzteren und die Überlegung — Aufsuchung und Ausbildung neuer Methoden eingeschlossen — nicht ausreichen, in erster Linie durch den Versuch Fragestellung an die Natur zu erfolgen hat.

Stuttgart, den 30. September 1889.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die dritte Auflage ist, abgesehen von einer Anzahl rechnerischer Ergänzungen, vorzugsweise durch Aufnahme von Versuchsergebnissen und den hierzu gehörigen Darlegungen in Zahl, Wort und Bild ergänzt worden. Ich halte es für zweckmäßig, den Leser geistig teilnehmen zu lassen an den wesentlichen Einzelheiten des Versuchs und ihn auf diese Weise zu befähigen, sich nach Möglichkeit ein eigenes, auf die tatsächlichen Verhältnisse gegründetes Urteil zu bilden. Dem jungen Fachgenossen kommt dabei von Anfang an zum Bewußtsein, daß es sich nicht um ein Gebiet handelt, das zu einem großen Teil bereits abgeschlossen ist, wie man vielfach anzunehmen pflegt, sondern daß er sich auf einem Gebiet befindet, welches selbst hinsichtlich der Feststellung seiner erfahrungsmäßigen Grundlagen noch in lebhafter Entwicklung begriffen ist.

In dieser Richtung weiterzuschreiten, dazu veranlaßte nicht bloß der leitende Grundgedanke des ganzen Buches (vergl. Vorwort zur ersten Auflage) sondern auch der Umstand, daß in mathematischer Hinsicht ausführliche und vorzügliche Werke vorliegen: die Arbeiten von Grashof, Keck, Müller-Breslau, Ritter, Weyrauch, Winkler u. a.

Eine vorurteilsfreie Überprüfung des Standes der Elastizitäts- und Festigkeitslehre zeigt, daß die physikalische Seite gegenüber der mathematischen Behandlung in gewissen Richtungen recht erheblich zurückgeblieben war. Damit hängt es dann auch teilweise zusammen, daß mancher der an und für sich richtigen, aber nicht auf ausreichend sicherer physikalischer Grundlage ruhenden mathematischen Entwicklungen der Vorwurf des Zuweitgehens oder gar der Unbrauchbarkeit gemacht werden konnte. Andererseits ließ man bei der mathematischen Bearbeitung Aufgaben von großer

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten — abgesehen von der Umarbeitung des Abschnittes über die plattenförmigen Körper — in der Hauptsache durch Ergänzungen, entsprechend einer Vermehrung des Textes um 56 Seiten. Beschränkung in dieser Hinsicht zu üben, erschien schon deshalb angezeigt, um dem Buche das Eindringen in weitere Kreise zu sichern, wozu gehört, daß der Preis desselben eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Hierin lag auch der Grund, der veranlaßte, davon abzusehen, die ursprüngliche Idee, eine Anzahl von Aufgaben nebst Lösungen aufzunehmen, zur Ausführung zu bringen.

Die Grundgedanken, welche bei Abfassung der ersten Auflage maßgebend waren, sind die leitenden geblieben, weshalb ich in dieser Beziehung nichts hinzuzufügen habe. Daß die Ersetzung des Elastizitätsmoduls durch den Dehnungskoeffizienten nicht ohne Bemängelung abgehen würde, war vorauszusehen. Demgegenüber kann ich nur auf die Arbeit selbst, insbesondere auf die Fußbemerkung zu § 2, verweisen, welche durch Übernahme einer bereits in der zweiten Auflage meiner Maschinenelemente gegebenen Darlegung ergänzt worden ist. Im Laufe der Zeit wird sich von selbst entscheiden, ob die Begriffe „Elastizitätsmodul“ und „Schubelastizitätsmodul“ das Feld behaupten, oder ob die Begriffe „Dehnungskoeffizient“ und „Schubkoeffizient“ an deren Stelle treten werden.

Im ganzen hat sich die Arbeit einer so wohlwollenden Aufnahme seitens der Fachgenossen zu erfreuen gehabt, daß ich nicht umhin kann, für die außerordentliche Förderung, welche hierin liegt, zu danken. Die Arbeitskraft des einzelnen ist eine begrenzte und das Arbeitsfeld des Maschineningenieurwesens ein so ausgedehntes, daß der einzelne selbst nur einen kleinen Beitrag durch das in seinen Arbeiten enthaltene Neue zu leisten vermag, infolgedessen dieses der entschiedenen Förderung durch die Fachgenossen bedarf, soll der Fortschritt ein allgemeiner und damit ein erheblicher werden.

Stuttgart, den 1. Juni 1894.

praktischer Bedeutung so gut wie unbeachtet, oder man sah bei ihrer Einkleidung in das mathematische Gewand von Wesentlichem ab, ließ wohl auch im Laufe der Rechnung mehr oder minder weitgehende Vernachlässigungen eintreten, ohne dann die Ergebnisse durch den Versuch einer Prüfung und nötigenfalls einer Berichtigung zu unterziehen.

Auf diesem Boden gedieh der Satz von dem Widerspruch zwischen Wissenschaft und Praxis. Man übersah dabei allerdings, daß eine Wissenschaft, die im Widerspruch steht mit der Wirklichkeit, d. h. mit dem, was tatsächlich ist, oder deren Folgerungen zu solchen Widersprüchen führen, nicht den Anspruch machen kann, wirklich Wissenschaft zu sein, mindestens nicht in Beziehung auf diejenigen Punkte, welche der Wirklichkeit zuwiderlaufen. Wo ein Gegensatz zwischen Wissenschaft und Praxis in die Erscheinung tritt, da zeigt eine scharfe Untersuchung meist sehr bald, daß entweder die Annahmen, die Grundlagen, von denen die wissenschaftliche Betrachtung ausgegangen ist, fehlerhaft waren, oder daß die Schlußfolgerungen mit Mängeln behaftet sind.

Ich habe es mir von vornherein, d. h. mit Eintritt in die Lehrtätigkeit im Jahre 1878, zur Aufgabe gestellt, mein bescheidenes Teil dazu beizutragen, daß solche Gegensätze verschwinden¹⁾. Wissenschaft und ausführende Technik müssen naturgemäß Hand in Hand gehen. Wo dieser Zustand nicht besteht, da muß von beiden Seiten mit Eifer und Ausdauer daran gearbeitet werden, ihn herbeizuführen. Wer in dieser Richtung kräftig strebt, wird sehr bald zu der Erkenntnis gelangen, daß den Ingenieurwissenschaften in erster Linie eine Sicherung und Erweiterung ihrer erfahrungsmäßigen Grundlagen, d. h. eine besondere Pflege ihrer physikalischen und chemischen Seite, nottut. Die Mathematik wird hierbei nicht nur ein sehr oft außerordentlich wertvolles Hilfsmittel sein, sondern sie wird häufig das Werkzeug bilden, ohne dessen Vorhandensein eine tiefere Erkenntnis überhaupt unerreichbar bliebe.

Die ausführende Technik ist nach meinen Erfahrungen immer dankbar, wenn ihr die Wissenschaft Hilfe leistet; sie läßt sich nicht — wie wohl zuweilen gemeint wird — durch das Schlag-

¹⁾ Vergl. z. B. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1894, S. 1361 und 1362; 1895, S. 1215 und 1216; 1896, S. 268 und 269; 1899, S. 1571.

wort von dem Widerspruch zwischen Theorie und Praxis abhalten, die wissenschaftlichen Darlegungen zu studieren und zu bewerten, vorausgesetzt, daß diese die Anforderung der Klarheit und genügender Einfachheit befriedigen. Sie weiß ihr Interesse, welches die volle Beachtung der Wissenschaft verlangt, wohl wahrzunehmen. Aber sehr empfindlich ist sie, wenn ihr von wissenschaftlicher Seite Darlegungen geboten werden, durch deren Befolgung Schaden entsteht. Bei der unmittelbaren und oft recht weitgehenden Verantwortlichkeit, welche die ausführende Technik zu tragen hat, erscheint dies durchaus begreiflich. Jeder Verstoß, den der Ingenieur gegen die Wirklichkeit begeht, pflegt bei der Ausführung seines Werkes als Fehler an das Tageslicht zu treten und in irgend einer Form Strafe nach sich zu ziehen. In der hieraus folgenden Notwendigkeit, möglichst zuverlässig zu arbeiten, liegt auch einer der Gründe, weshalb schon seit längerer Zeit die Technik und ihre wissenschaftlichen Vertreter nicht bloß manche in das Gebiet der Physik und Chemie gehörige Zahl genauer festgestellt haben, als dies von der Physik beziehungsweise der Chemie selbst geschehen ist, sondern daß sie auch manches bisher überhaupt nicht Erkannte aufgefunden sowie manchen ins Dunkle gehüllten Vorgang aufgeklärt und ganz wesentlich zur Entwicklung und Förderung dieser Wissenschaften an sich beigetragen haben. Ein weiterer Grund dafür, daß die Technik der Wissenschaft an sich häufiger vorauseilt, als man anzunehmen pflegt, ist dadurch gegeben, daß ihr Aufgaben entgegengebracht werden, die sie lösen muß — möglichst vollkommen, namentlich auch in wirtschaftlicher Beziehung —, ohne sich auf wissenschaftlich Erkanntes stützen zu können. Die deutsche Industrie und die technischen Staatsbetriebe Deutschlands besitzen eine vergleichsweise große Anzahl von Ingenieuren, die in einer Weise streng wissenschaftlich arbeiten, wie vielfach selbst von Vertretern der Wissenschaft nicht vermutet wird.

Inwieweit es mir mit der Bearbeitung der dritten Auflage gelungen ist, zur Klarstellung schwebender oder aufgeworfener Fragen (vergl. z. B. den Inhalt von § 4 und § 5, ferner S. 116 u. f., S. 192 u. f., S. 211 u. f., S. 470 u. f., u. s. w.), zur Vertiefung unserer Erkenntnisse auf dem Gebiet der Elastizität und Festigkeit beizutragen, muß ich dem wohlwollenden Urteil der Fachgenossen zur Entscheidung anheimstellen. Gern hätte ich noch Weiteres auf-

genommen, aber die starke Inanspruchnahme durch die unmittelbare Berufstätigkeit, zu welcher sich z. Z. noch die Errichtung eines Laboratoriums für Maschineningenieure gesellt hat, im Zusammenhange damit, daß das Buch schon seit längerer Zeit vergriffen ist, nötigten zur Beschränkung.

Stuttgart, Anfang Januar 1898.

Vorwort zur vierten Auflage.

Die vierte Auflage wurde, abgesehen von einer größeren Anzahl von Ergänzungen in allen bisher vorhandenen Abschnitten des Buches (vergl. z. B. § 13, Ziff. 3, § 22, Ziff. 4 u. s. w.), durch Aufnahme eines neuen (achten) Abschnittes: „Allgemeine Beziehungen über Spannungen und Formänderungen im Innern eines elastischen Körpers“ erweitert. Hierzu veranlaßte in erster Linie der Umstand, daß ich seit Erscheinen der dritten Auflage infolge des wachsenden Umfanges der mir sonst obliegenden Verpflichtungen u. a. auch die Vorlesung über Elastizitätslehre abgegeben habe. In diesem Vortrag, der im Jahre 1878 an unserem Polytechnikum mit besonderer Rücksichtnahme auf die dem Maschinenkonstrukteur sich bietenden Aufgaben zur Einführung gelangte, habe ich in den 21 Jahren, während deren ich ihn gehalten, auch das gegeben, was der genannte Abschnitt bietet. Die Aufnahme in das Buch ist bisher unterblieben, weil, wie schon in dem Vorwort zur ersten Auflage ausgesprochen, dasselbe ursprünglich nur für die Zuhörer dieses Vortrages bestimmt war.

Ich weiß recht wohl, daß die Anzahl derjenigen Studierenden und Ingenieure, welche sich mit den allgemeinen Betrachtungen über den Spannungs- sowie Formänderungszustand und insbesondere den aus ihnen sich ergebenden Gleichungen zu beschäftigen pflegen, verhältnismäßig gering ist, und ich bin der Überzeugung, daß dies auch voraussichtlich so bleiben wird, ohne daß hierin ein schwerwiegender Nachteil für die Technik erblickt werden kann.

Es setzt dies allerdings voraus, daß sich eine, wenn auch kleine, Minderzahl erfolgreich mit Bearbeitung des hier zur Erörterung stehenden Gebietes befaßt. Der großen Mehrzahl der mitten in der Ausführung stehenden Ingenieure, welche auf den Gebieten des wirtschaftlichen Lebens leitend oder auch noch schöpferisch tätig sein müssen, liegen andere Aufgaben ob¹⁾, und bei der Begrenztheit der Arbeitskraft des einzelnen einerseits und angesichts der ungeheuren Ausdehnung des Ingenieurwesens andererseits wird die Arbeitsteilung zur Notwendigkeit.

Diese Verhältnisse haben mich jedoch niemals abgehalten, mit meinen Zuhörern die Betrachtungen durchzunehmen, welche zu den allgemeinen Gleichungen der Elastizitätslehre führen. Der zukünftige Ingenieur muß — auch wenn er keine Neigung hat, an der Entwicklung der wissenschaftlichen Grundlagen des Ingenieurwesens mitzuarbeiten —, die allgemeinen Grundlagen der Gebiete, die er studiert, ausreichend kennen. Im vorliegenden Sonderfalle heißt dies, daß ihm die allgemeinen Gleichungen der Elastizitätslehre, wenn sie ihm in der Literatur entgegentreten, nicht fremd sein dürfen. Er soll — wenn auch nur in beschränktem Sinne — ein Urteil darüber haben, wie sicher oder unsicher die Grundlagen sind, auf denen sich derartige Rechnungen aufbauen, und ob aus der einen oder anderen solcher Rechnungen ein brauchbares Ergebnis für das Ingenieurwesen zu erwarten steht. Es ist für den ausführenden Ingenieur nicht selten außerordentlich wichtig, ein Urteil, wenn auch nur einigermaßen, darüber zu haben, was man überhaupt nicht oder doch nicht sicher weiß, gegebenenfalls nicht sicher ermitteln kann.

Außerdem kommt in Betracht, daß eine strenge Behandlung verschiedener, für die ausführende Technik wichtiger Aufgaben von den allgemeinen Gleichungen der Elastizitätslehre auszugehen oder doch auf sie zurückzugreifen hat, wenn auch nur, um zu prüfen, ob die gemachten Annahmen mit ihnen in Widerspruch stehen oder nicht. Es sei hier erinnert an die Aufgaben der Drehungselastizität, deren strenge Lösung allerdings bisher nur für wenige der in Betracht kommenden Querschnitte ausreichend gelungen ist, sowie an die Aufgaben, bei denen Normal- und Schub-

¹⁾ Vergl. z. B. das Vorwort zur achten Auflage der Maschinenelemente des Verfassers.

spannungen in den Querschnitten stabförmiger Körper gleichzeitig auftreten, an die Aufgaben, welche plattenförmige Körper und Gefäße vielfach bieten, u. s. w.

Wenn auch manche Entwicklungen in dem bisherigen Inhalt des Buches (Abschnitt 1 bis 7) auf die Ergebnisse des neuen achten Abschnittes hätten gestützt werden können, so habe ich dies doch absichtlich unterlassen, weil ich es für den Ingenieur als wertvoll erachte, jede Untersuchung für sich so weit selbstständig durchzuführen, als es die Verhältnisse gestatten und als im Einzelfalle zweckmäßig erscheint, und zweitens, weil ich der Überzeugung bin, daß die Elastizität und Festigkeit am erfolgreichsten zunächst in der Weise studiert wird, daß man von den einfachen Fällen ausgeht und unter Benutzung der hierbei gewonnenen Ergebnisse zu zusammengesetzteren fortschreitet. Ich halte dieses Vorgehen auch dann für richtig, wenn der Studierende über gute Kenntnisse auf dem Gebiete der höheren Mathematik verfügt. Die Auffassung, daß der wissenschaftliche Gang bei der Behandlung der Elastizitäts- und Festigkeitslehre auch für den Ingenieur vom Allgemeinen zum Besonderen zu führen habe, vermag ich nicht zu teilen. Derjenige Studierende, welcher beim erstmaligen Studium des Gebietes zunächst die seinem Verständnis näher liegenden Sonderfälle mit den verschiedenen Abweichungen von den Voraussetzungen, welche die Elastizitätslehre bei ihren allgemeinen Entwicklungen notwendigerweise machen muß, gründlich studiert hat und sodann fortschreitend schließlich bis zur Klarheit über die allgemeinen Beziehungen der Elastizitätslehre gelangt ist, wird bei demselben Zeitaufwand in der Regel einen weiter- und tiefergehenden Einblick gewonnen haben als derjenige, welcher den umgekehrten Weg eingeschlagen hat. Insbesondere wird dies zutage treten, wenn es sich um die Verwendung der Kenntnisse auf dem Gebiete des Ingenieurwesens handelt, also um das Können gegenüber den tausendfältigen Aufgaben, die das Leben fortgesetzt bietet.

Stuttgart, Anfang September 1901.

Vorwort zur fünften Auflage.

Die neue Auflage hat verschiedene Ergänzungen erfahren, so z. B. im ersten Abschnitt durch die Klarstellung, daß im allgemeinen eine untere und eine obere Streckgrenze zu unterscheiden ist, und daß diese Spannung in erheblichem Maße von der Querschnittsform beeinflußt wird (§ 2, § 4), ferner durch die Aufnahme von Versuchsergebnissen über die Änderung der Festigkeitseigenschaften von Metallen bei höheren Temperaturen (§ 10) u. s. w. Allerdings konnten die Ergänzungen nicht in dem Umfange stattfinden, wie ich es selbst gewünscht hatte. Das Buch war schon seit einiger Zeit vergriffen und ich sonst recht stark in Anspruch genommen; infolgedessen mußte Beschränkung geübt werden.

Im übrigen darf ich wohl auf das zu den früheren Auflagen Gesagte verweisen; die daselbst niedergelegten Gesichtspunkte sind auch jetzt wieder für mich leitend gewesen.

Die wohlwollende Aufnahme, welche das Buch gefunden hat, im Zusammenhange mit dem Umstande, daß ein großer Teil dessen, was ich in den früheren Auflagen dargelegt habe, bereits Allgemeingut geworden ist oder doch anregend und klarstellend gewirkt hat, läßt mich hoffen, daß auch die neue Auflage zur Förderung der Erkenntnis des tatsächlichen Verhaltens der Materialien beitragen wird.

Meinem früheren Assistenten, Herrn Ingenieur Braun, habe ich für die Unterstützung bei der Arbeit (vergl. z. B. S. 498) bestens zu danken.

Stuttgart, den 15. März 1905.

C. Bach.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch Normalspannungen (Dehnungen).

Einleitung.

	Seite
§ 1. Formänderung. Spannung	1
§ 2. Dehnung. Dehnungskoeffizient. Proportionalitätsgrenze. Fließgrenze	3
§ 3. Bruchbelastung. Zugfestigkeit. Querschnittsverminderung. Bruchdehnung. Arbeitsvermögen	8
§ 4. Längenänderungen verschiedener Stoffe. Gesamte, bleibende und federnde Längenänderungen. Elastizitätsgrenze.	
1. Versuche mit Gußeisen	13
2. - - Flußeisen	41
3. - - Flußstahl	51
4. - - Kupfer	54
5. - - Bronze	59
6. - - Messing	62
7. - - Leder	64
8. - - Zement, Zementmörtel, Beton	67
9. - - Granit	69
10. - - Marmor	71
11. - - Sandstein	76
§ 5. Gesetz der Längenänderungen u. s. w.	
1. Gesetz der Längenänderungen	76
2. Maß der Vollkommenheit und der Größe der Elastizität	79
3. Allgemeineres Gesetz der elastischen Dehnung	81
4. Einfluß der Zeit. Elastische Nachwirkung	88

I. Zug.

	Seite
§ 6. Gleichungen der Zugelastizität und Zugfestigkeit.	
1. Stab mit gleichem Querschnitt	91
2. Stab mit veränderlichem Querschnitt	91
3. Beispiel der Zugelastizität mit Rücksicht auf den Einfluß der Temperatur	95
§ 7. Maß der Zusammenziehung. Kräfte senkrecht zur Stabachse. Gehinderte Zusammenziehung	99
§ 8. Zugproben	103
Einrichtungen zum Messen der Längenänderungen (Zug und Druck)	110
§ 9. Einfluß der Form des Stabes	122
1. Einfluß der Stabform, welche der Querschnittsverminderung (Zusammenziehung) hinderlich ist	123
2. Einfluß der Länge und des Durchmessers	129
3. Einfluß der Querschnittsform	136
§ 10. Versuchsergebnisse über den Einfluß der Zeit auf Festigkeit, Dehnung und Querschnittsverminderung. Einfluß der Temperatur.	
1. Einfluß der Zeit	144
2. Einfluß der Temperatur	147

II. Druck.

§ 11. Formänderung. Druckfestigkeit	154
§ 12. Gleichungen der Druckelastizität und Druckfestigkeit	158
§ 13. Druckversuche. Einfluß der Gestalt des Körpers auf die Druckfestigkeit	160
1. Die Belastung trifft die ganze Stirnfläche des Probekörpers	161
2. Die Belastung trifft unmittelbar nur einen Teil der Querschnittsfläche des Probekörpers	167
3. Die Belastung trifft einen Körper mit gewölbter Oberfläche (Kugel, Zylinder)	172
§ 14. Hinderung der Querdehnung	184
§ 15. Theorien der Druckfestigkeit	186

III. Biegung.

§ 16. Gleichungen der Biegungsanstrengung und der elastischen Linie unter der Voraussetzung, daß die Ebene des Kräftepaars den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen schneidet	187
§ 17. Trägheitsmomente	193
1. Rechteck	194
2. Dreieck	194
3. Kreis	195
4. Ellipse	195
5. Zusammengesetzte Querschnitte.	
a) Rechnerische Bestimmung	196
b) Zeichnerische Bestimmung	197
6. Zusammenstellung	200



	Seite
§ 18. Fälle bestimmter Belastungen.	
1. Der Stab ist an dem einen Ende eingespannt, am freien Ende mit P belastet	201
2. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen	203
3. Der Stab ist beiderseits wagrecht eingespannt	208
§ 19. Körper von gleichem Widerstande	210
1. Der Stab mit rechteckigem Querschnitt von gleicher Breite ist einerseits eingespannt, am anderen, freien Ende belastet .	211
2. Der Stab wie unter 1, jedoch von konstanter Höhe h	213
3. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen und ist zwischen beiden belastet	214
§ 20. Die bei der Entwicklung der Gleichungen in § 16 gemachten Voraussetzungen und ihre Zulässigkeit. Der durch Biegung in Anspruch genommene Stab auf Grund des Gesetzes $\epsilon = \alpha \sigma^m$	215
1. Die äußeren Kräfte ergeben nur ein Kräftepaar	219
2. Die Fasern üben einen gegenseitigen Einfluß aufeinander nicht aus	220
3. Die Querschnitte bleiben eben	223
4. Der Dehnungskoeffizient ist unveränderlich. Der gebogene Stab auf Grund des Gesetzes $\epsilon = \alpha \sigma^m$	224
5. Zusammenfassung	234
§ 21. Biegungsanstrengung und Durchbiegung unter der Voraussetzung, daß die Ebene des Kräftepaars keine der beiden Hauptachsen des Querschnittes in sich enthält.	
1. Hauptachsen. Hauptträgheitsmomente	236
2. Biegungsanstrengung	238
3. Durchbiegung	241
§ 22. Biegungsversuche.	
1. Biegungsversuche im allgemeinen	243
2. Abhängigkeit der Biegungsfestigkeit des Gußeisens von der Querschnittsform	247
3. Einfluß der Gußhaut	253
4. Versuche zur Klarstellung des Zusammenhanges zwischen Zug- und Biegungsfestigkeit von Gußeisen u. s. w.	254

IV. Knickung.

§ 23. Wesen der Knickung	262
§ 24. Knickbelastung (Eulersche Gleichung)	264
§ 25. Zulässige Belastung gegenüber Knickung	270
§ 26. Naviersche (Schwarzsche) Knickungsformel	273
§ 27. Knickungsversuche	281

Zweiter Abschnitt.

Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper
durch Schubspannungen (Schiebungen).

Einleitung.		Seite
§ 28.	Schiebung	288
§ 29.	Schubspannung. Schubkoeffizient	291
§ 30.	Paarweises Auftreten der Schubspannungen	293
§ 31.	Schiebungen und Dehnungen. Schubkoeffizient und Dehnungs- koeffizient.	
	1. Mit der Schiebung verknüpfte Dehnung und deren größter Wert	296
	2. Beziehung zwischen Dehnungskoeffizient und Schubkoeffizient	298
V. Drehung.		
§ 32.	Stab von kreisförmigem Querschnitt	302
§ 33.	Stab von elliptischem Querschnitt.	
	1. Formänderung	309
	2. Schubspannungen	310
§ 34.	Stab von rechteckigem Querschnitt.	
	1. Formänderung	316
	2. Schubspannungen	319
	3. Gehinderte Ausbildung der Querschnittswölbung	326
§ 35.	Drehungsversuche.	
	1. Abhängigkeit der Drehungsfestigkeit des Gußeisens von der Querschnittsform	328
	2. Drehungswinkel	348
	3. Versuche mit Rundstäben und mit Schrauben aus Schweiß- und Flußeisen	351
§ 36.	Zusammenfassung	353
	Kreis, Ellipse, Sechseck, Rechteck, Dreieck,  -Querschnitt, Kreuzquerschnitt,  -Querschnitt, Winkelquerschnitt.	
VI. Schub.		
§ 37.	Allgemeines. Schubanstrengung unter der Voraussetzung gleich- mäßiger Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt . . .	357
§ 38.	Schubspannungen im rechteckigen Stabe	359
§ 39.	Schubspannungen im prismatischen Stabe von beliebigem, jedoch hinsichtlich der Kraftebene symmetrischem Querschnitt	363
§ 40.	Schubversuche	372

Dritter Abschnitt.

Formänderungsarbeit

gerader stabförmiger Körper bei Beanspruchung auf Zug, Druck,
Biegung, Drehung oder Schub.

	Seite
§ 41. Arbeit der Längenänderung	381
§ 42. Arbeit der Biegung	385
§ 43. Arbeit der Drehung	388
§ 44. Arbeit der Schiebung	395

Vierter Abschnitt.

Zusammengesetzte Beanspruchung gerader stabförmiger Körper.

VII. Beanspruchung durch Normalspannungen (Dehnungen). Zug, Druck und Biegung.

§ 45. Allgemeines. Der Stab ist nur durch Kräfte beansprucht, welche in Richtung seiner Achse wirken.	
Allgemeines	397
Der einerseits befestigte prismatische Stab wird durch eine zur Stabachse parallele, jedoch exzentrisch zu ihr gelegene Kraft P belastet.	
1. Die Kraft wirkt ziehend	399
2. Die Kraft wirkt drückend	401
a) Der Stab ist schlank und der Hebelarm a klein . . .	402
b) Der Stab ist schlank und der Hebelarm a im Verhältnis zu den Abmessungen des Querschnittes groß	405
c) Die Querschnittsabmessungen des Körpers sind im Vergleich zur Länge desselben und zur Größe des Hebelarmes so bedeutend, daß eine Biegung von Erheblichkeit nicht eintritt	406
§ 46. Einfluß von Kräften, welche in Richtung der Stabachse oder parallel zu ihr wirken, während der Stab durch Querkräfte durchgebogen wird.	
1. Einfluß des Widerstandes beim Gleiten der Oberfläche des beiderseits gelagerten und in der Mitte durch P belasteten Stabes gegenüber den Stützen infolge der Durchbiegung . . .	410
2. Der an den Enden drehbar befestigte und hier durch Zugkräfte gespannte prismatische Stab wird durch die gleichmäßig über ihn verteilte Querkraft $Q = p l$ belastet	414
3. Ein dünner Stab ist um eine Rolle geschlungen und durch Zugkräfte belastet	418